Magneticな不純物がある超伝導体のOrder Parameterの空間的変化

北村, 豊幸

Magneticな不純物がある超伝導体のOrder Parameterの空間的変化

教育大理　北 村 豊 幸

（8月20日受理）

§ 1.

magnetic な不純物がある超伝導体の取扱いは，最初に，Abrikosov と Gor'kov[1)] が行った。彼等は，spin exchange 相互作用を Born 近似の範囲内で議論している。Kondo[2)] が second Born 近似まで求めて以来，高次の振舞いが興味の中心となっており，超伝導体における Kondo 効果の仕事も多くの人達によって検討されている。[3)〜7)]

magnetic な不純物のある超伝導体の order parameter の空間的変化は，Tsuzuki と Tsuneto[8)] によって検討された。彼等は order parameter $\triangle(r)$ の linearized self-consistent な積分方程式をとき，$\triangle(r)$ を一個の不純物からの距離 r の関数として求めたが，coherence length $\xi_0 = \dfrac{v_F}{2\pi T_{co}}$（$v_F$：Fermi 速度，$T_{co}$：遷移温度）に比べ十分離れた $r \gg \xi_0$ の振舞いで，r^{-1} に比例する項が入っていない。最近，Heinrichs[9)] は T. T，の積分方程式を積分演算子を用いて，T_c の極近傍で，r^{-1} に比例する項まで求めている。

order parameter の空間的変化の今までの議論は，Kondo 効果を考慮に入れてなかった。ここでは，超伝導体に，Nagaoka 型[6),7),10)] の decoupling を拡張した運動方程式を，Kondo 効果が現われる J の最低次，すなわち，3次まで考慮して，$\triangle(r)$ の linearized self-consistent な積分方程式を導き，log 発散が表れることを示す。

§ 2では，Kondo 効果を含んだ，order parameter $\triangle(r)$ の linearized 積分方程式を導く，§ 3では，§ 2で導入した $t(\omega)$ − matrix を，$\triangle(r)$ について一次，J について，三次まで求める。§ 4では，積分演算子を使って，遷移温度 T_c，$\triangle(r)$ の振舞いを導き，log 発散が表れることを示す。

北村豊幸

§ 2. Formulation：

ハミルトニアンとして，s－d相互作用と，B，C，S，モデルを考えてやれば，

$$H = -\int \psi_\alpha^{+}(\mathbf{r})\frac{\nabla^2}{2m}\psi_\alpha(\mathbf{r})\,d^3r - \frac{J}{2}\Big\{(\psi_\uparrow^{+}(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r}) - \psi_\downarrow^{+}(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r}))S_z + \psi_\uparrow^{+}(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})S_- + \psi_\downarrow^{+}(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r})S_+\Big\}\delta(\mathbf{r})\,d^3r - g\int \psi_\uparrow^{+}(\mathbf{r})\psi_\downarrow^{+}(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r})\,d^3r \tag{1}$$

となり，運動方程式は

$$\left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \triangle(r)\tau_1\right)\hat{G}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{J}{2}\delta(\mathbf{r})\hat{\Gamma}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{2}$$

$$\left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \triangle(\mathbf{r})\tau_1\right)\hat{\Gamma}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -J\Big\{\tau_3(n(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\delta(\mathbf{r})) - \tau_1\triangle'(r)\Big\}\hat{\Gamma}_\omega(o,\mathbf{r}') + \frac{J}{2}\Big\{(m(\mathbf{r}) - \frac{3}{4}\delta(\mathbf{r})) + \nu(\mathbf{r})\Big\}\hat{G}_\omega(o,\mathbf{r}') \tag{3}$$

ここで，τ_1，τ_3 は pauli matrix，また，

$$\hat{G}(xx') = \begin{pmatrix} \mathcal{G}(xx') & \mathcal{F}(xx') \\ \mathcal{F}^{+}(xx') & -\mathcal{G}(x'x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\langle\psi_\uparrow(x)\,;\,\psi_\uparrow^{+}(x')\rangle\rangle & \langle\langle\psi_\uparrow(x)\,;\,\psi_\downarrow(x')\rangle\rangle \\ \langle\langle\psi_\downarrow^{+}(x)\,;\,\psi_\uparrow^{+}(x)\rangle\rangle & -\langle\langle\psi_\downarrow(x')\,;\,\psi_\downarrow^{+}(x)\rangle\rangle \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\hat{\Gamma}(xx') = \begin{pmatrix} \Gamma(x,x') & \Phi(x,x') \\ \Phi^{+}(x,x') & \Gamma^{+}(x,x') \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\langle\psi_\uparrow S_z + \psi_\downarrow S_-\,;\,\psi_\uparrow^{+}(x')\rangle\rangle & \langle\langle\psi_\uparrow S_z + \psi_\downarrow S_-\,;\,\psi_\downarrow(x')\rangle\rangle \\ \langle\langle\psi_\downarrow^{+}S_z - \psi_\uparrow^{+}S_-\,;\,\psi_\uparrow^{+}(x')\rangle\rangle & \langle\langle\psi_\downarrow^{+}S_z - \psi_\uparrow^{+}S_-\,;\,\psi_\downarrow(x')\rangle\rangle \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$m(r) = 3 < \psi_{\uparrow}^{+}(0)\, \psi_{\downarrow}(r)\, S_{-} >, \quad n(r) = < \psi_{\downarrow}^{+}(0)\; \psi_{\downarrow}(r) >$$

(6)

$$\triangle'(r) = < \psi_{\uparrow}(0)\, \psi_{\downarrow}(r) > \qquad \hat{\nu}(r) = \begin{pmatrix} 0 & 3<\psi_{\downarrow}(0)\psi_{\downarrow}(r) S_{-}> \\ 3<\psi_{\downarrow}^{+}(0)\psi_{\downarrow}^{+}(r) S_{+}> & 0 \end{pmatrix}$$

ここで，$\ll A(x)\,;\,B(x') \gg$ は温度 Green 関数であり，次のように定義する。

$$\ll A(x)\,;\,B(x') \gg \; = \; < T\{A(x)\, B(x')\} > \tag{7}$$

order parameter $\triangle(r)$ は

$$\triangle(r) = g\, T \sum_{\omega} \mathscr{F}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}) \tag{8}$$

で定義される。$\triangle(r)$ の self-consistent な方程式を求めるために，effective に $\triangle(r)$ を持った，pure super 状態の Green 関数を考えてやる。

$$\left(i\omega + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \triangle(r)\tau_1 \right) \hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{9}$$

(2)，(3) の解は，(9) を使って，次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{J}{2}\int \hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\,\delta(\mathbf{r}'')\,\hat{\Gamma}_{\omega}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\,d^3r'' \\ &= \hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{J}{2}\hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},o)\,\hat{\Gamma}_{\omega}(o,\mathbf{r}') \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = &- J\int \hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\left\{\tau_3\left(n(\mathbf{r}'') - \frac{1}{2}\delta(\mathbf{r}'')\right) - \tau_1\triangle'(\mathbf{r}'')\right\} \\ &\times \hat{\Gamma}_{\omega}(o,\mathbf{r}')\,d^3r'' + \frac{J}{2}\int \hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\left\{m(\mathbf{r}'') - \frac{3}{4}\delta(\mathbf{r}'') + \hat{\nu}(\mathbf{r}'')\right\} \\ &\times \hat{G}_{\omega}(o,\mathbf{r}')\,d^3r'' \end{aligned} \tag{11}$$

(10)，(11) の積分方程式を，pure super 状態の Green 関数を使って解けば，

$$\hat{G}_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \hat{G}^0_{\omega}(\mathbf{r},o)\,\hat{t}(\omega)\,\hat{G}^0_{\omega}(o,\mathbf{r}') \tag{12}$$

を得る。ここで，$\hat{t}$-matrix は，次のように定義される。

$$\hat{t}(\omega) = -\frac{J^2}{4}\hat{A}(\omega)\left(1+\frac{J^2}{4}\hat{F}(\omega)\hat{A}(\omega)\right)^{-1} \tag{13}$$

$$\hat{A}(\omega) = \left\{1+J\left(\hat{G}(\omega)\tau_3+\hat{\triangle}(\omega)\tau_1\right)\right\}^{-1}\left(\hat{\Gamma}_1(\omega)+\hat{\Gamma}_2(\omega)\right) \tag{14}$$

$$\hat{F}(\omega) = \hat{G}^0_\omega(o, o) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\hat{G}(\omega) &= \int \hat{G}^0_\omega(o,\mathbf{r})\left(n(\mathbf{r})-\frac{1}{2}\delta(\mathbf{r})\right)d^5 r, \\
\triangle(\omega) &= -\int \hat{G}^0_\omega(o,\mathbf{r})\,\triangle'(\mathbf{r})\,d^3 r, \\
\hat{\Gamma}_1(\omega) &= \int \hat{G}^0_\omega(o,\mathbf{r})\left(m(\mathbf{r})-\frac{3}{4}\delta(\mathbf{r})\right)d^3 r, \\
\hat{\Gamma}_2(\omega) &= \int \hat{G}^0_\omega(o,\mathbf{r})\,\hat{\nu}(\mathbf{r})\,d^3 r
\end{aligned} \tag{16}$$

$\triangle(r)$ の T_c 近傍の振舞いを調べるために，$\triangle(r)$ の linearized eq，を導こう。(12) 式の 1 2 ー成分をとれば，

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}) &= \mathscr{F}^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}) + \mathscr{Y}^0_\omega(\mathbf{r},o)\,t_{11}(\omega)\mathscr{F}^0_\omega(o,\mathbf{r}) - \mathscr{Y}^0_\omega(\mathbf{r},o)\,t_{12}(\omega)\mathscr{Y}^0_{-\omega}(\mathbf{r},o) \\
&\quad - \mathscr{F}^0_\omega(\mathbf{r},o)\,t_{22}(\omega)\mathscr{Y}^0_{-\omega}(\mathbf{r},o)
\end{aligned} \tag{17}$$

となる。$\mathscr{Y}^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{s})$ は，$\triangle(r)$ の linear まで考えている限り，normal の Green 関数でおきかえてよく，$\mathscr{F}^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{s})$ は $\triangle$ の linear で展開して，

$$\mathscr{F}^0_\omega(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \int \mathscr{Y}^0_\omega(\mathbf{r},\boldsymbol{\ell})\,\triangle(\ell)\,\mathscr{Y}^0_{-\omega}(\mathbf{s},\boldsymbol{\ell})\,d^3\ell \tag{18}$$

を考えてやればよい。(8) と (18) から (17) を書きかえれば，order parameter の self-consistent eq，を得る。

$$\begin{aligned}
\triangle(r) &= gT\sum_\omega \int K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|,\omega)\,\triangle(s)\,d^3 s - gT\sum_\omega t_{12}(\omega)\,K_0(\mathbf{r},\omega) \\
&\quad - gT\sum_\omega t_{22}(\omega)\,I_1(\mathbf{r},\omega) - gT\sum_\omega t_{11}(\omega)\,I_2(\mathbf{r},\omega)
\end{aligned} \tag{19}$$

ここで，

$$K_0(|\mathbf{r-s}|,\omega) = \mathscr{G}^0_\omega(\mathbf{r,s})\,\mathscr{G}^0_{-\omega}(\mathbf{r,s}) \tag{20}$$

と定義した。ここで，T，T，の近似，$r P_F \gg 1$ では，$\exp(iP_F r)$ は急激に振動して消えてしまうことを考えてやれば，$I_1(r,\omega)$，$I_2(r,\omega)$ は $K_0(r,\omega)$ を使って，

$$I_1(r,\omega) = \frac{1}{2\rho_0(\omega)} K_0(r,\omega) \int K_0(s,\omega) \triangle(s)\, d^3 s,$$

$$I_2(r,\omega) = \frac{-1}{2\rho_0(\omega)} K_0(r,\omega) \int K_0(s,\omega) \triangle(s)\, d^3 s \tag{21}$$

と書かれる。ここで，$\rho_0(\omega) = \mathscr{G}^0_\omega(oo) = -\, i\Pi\rho\, \mathrm{sign}\ \omega$ である。こうして，

$$\triangle(r) = gT\sum_\omega \int K_0(|\mathbf{r-s}|,\omega)\triangle(s)\, d^3 s - gT\sum_\omega t_{12}(\omega) K_0(r,\omega)$$

$$- gT\sum_\omega \frac{t_{22}(\omega)+t_{11}(\omega)}{2\rho_0(\omega)} K_0(r,\omega)\int K_0(s,\omega)\triangle(s)\, d^3 s \tag{22}$$

なる，一般化された $\triangle(r)$ の linearized self-consistent eq，を得た。

§3. $\hat{t}(\omega)$ — matrix：

簡単のため，$\hat{t}(\omega)$ - matrix を，Kondo 効果が入る。J について最低次，三次まで計算しよう。$\hat{t}(\omega)$ — matrix の diagonal 成分は容易に解かれるように，normal 状態の t - matrix と，△の二次から始まる項とからなっている。したがって，$t_{11}(\omega)$，$t_{22}(\omega)$ は normal 状態の t - matrix で置きかえてよい。同様なことは，m(r)，n(r) についても言える。n(r) は電子の分布関数とする。こうして，$t_{11}(\omega)$，$t_{22}(\omega)$，m(r) は，J^3 までは容易に求められて，

$$t_{11}(\omega) = t_{22}(\omega) \doteq \frac{3}{4}\left(\frac{J}{2}\right)^2 \rho_0(\omega) + i\,\frac{3}{2}\left(\frac{J}{2}\right)^3 \rho\,\rho_0(\omega)\, g(i\omega) \tag{23}$$

$$m_{\mathbf{k}} = \int e^{-i\mathbf{k\cdot r}} m(r)\, d^3 r = i\,\frac{3}{4}\left(\frac{J}{2}\right)\rho\, g(\xi_{\mathbf{k}}) \tag{24}$$

ここで，$\xi_{\mathbf{k}}$ は Fermi 面から測った運動量 $\mathbf{k}$ のエネルギーである。$g(\xi_{\mathbf{k}})$ は次のように定義される。

$$g(\xi_{\mathbf{k}}) = 2\Pi T \sum_{\omega} \frac{\operatorname{sign}\omega_n}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}} \tag{25}$$

$t_{12}(\omega)$ を求めるために，（13）式をJの三乗まで展開すれば

$$t_{12}(\omega) = -\left(\frac{J}{2}\right)^2 \left(\hat{\Gamma}_1(\omega)+\hat{\Gamma}_2(\omega)\right)_{12} + \left(\frac{J}{2}\right)^3 \Big\{ \left(\hat{G}(\omega)_{11}+\hat{\triangle}(\omega)_{12}\right)$$
$$\times \left(\hat{\Gamma}_1(\omega)+\hat{\Gamma}_2(\omega)\right)_{12} + \left(-\hat{G}(\omega)_{12}+\hat{\triangle}(\omega)_{11}\right)\cdot\left(\hat{\Gamma}_1(\omega)+\hat{\Gamma}_2(\omega)\right)_{22}\Big\} \tag{26}$$

となり，ここで，スペクトル定理

$$\triangle'(r) = -T\sum_{\omega} \hat{G}^0_{\omega}(o,\mathbf{r})_{12} = -T\sum_{\omega}\int \mathscr{Y}^0_{\omega}(o,\mathbf{s})\triangle(s)\mathscr{Y}^0_{-\omega}(\mathbf{r},\mathbf{s})\, d^3S \tag{27}$$

$$\hat{\nu}(r) = -2T\sum_{\omega}\hat{\Gamma}_{\omega}(o,\mathbf{r})_{o,d,} = 2T\frac{2}{J}\sum_{\omega}\left(\hat{t}(\omega)\hat{G}^0_{\omega}(o,\mathbf{r})\right)_{o,d}, \tag{28}$$

と，（16）式を使って，（26）式を書き下せば，$t_{12}(\omega)$ の積分方程式を得る。Jについて逐次近似を行えば，J^2 の項は直ちに求められる。この J^2 の項を（26）式の右辺の $t_{12}(\omega)$ に入れてやれば，J^3 も求めることが出来る。こうして得た J^2，J^3 の項を $t'_{12}(\omega)$，$t^2_{12}(\omega)$ とすれば，

$$t'_{12}(\omega) = \frac{3}{4}\left(\frac{J}{2}\right)^2 \int K_0(s,\omega)\triangle(s)\, d^3S \tag{29}$$

$$t^2_{12}(\omega) = -\left(\frac{J}{2}\right)^3 \Big[\Big\{\frac{2}{J}M(\omega) + \frac{3}{4}i\rho g(i\omega) - \frac{3}{2}\rho_0(\omega)F(\omega)\Big\}$$
$$\times \int K_0(s,\omega)\triangle(s)\, d^3S + \frac{3}{2}T\sum_{\omega'}\Big\{\rho_0(\omega')G(\omega,\omega') + \rho_0(\omega)G(\omega,\omega')$$
$$-\frac{2\Pi\rho\theta(\omega\omega')}{|\omega|+|\omega'|}\Big\}\int K_0(s,\omega')\triangle(s)\, d^3S\Big] \tag{30}$$

ここで，T，T，近似の範囲内で，

$$\int \mathscr{Y}_{\omega}^{0}(o,\mathbf{s}) \triangle(s) \mathscr{Y}_{-\omega}^{0}(\mathbf{r},\mathbf{s}) \, d^3S \cong \frac{1}{2\rho_0(\omega)} \int K_0(s,\omega) \triangle(s) \, d^3S \times \int \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{\xi + i\omega} \frac{d^3p}{(2\Pi)^3} \tag{31}$$

を使う。こうして，

$$M(\omega) = \frac{1}{2\rho_0(\omega)} \int \frac{1}{\xi + i\omega} m^0(r) \, e^{i\mathbf{p},\mathbf{r}} \frac{d^3p}{(2\Pi)^3} d^3r = \frac{3}{2}\left(\frac{J}{2}\right) \rho \Pi T \sum_{\omega'} \frac{\theta(\omega\omega')}{|\omega| + |\omega'|} \tag{32}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\rho_0(\omega)} \int \frac{1}{\xi + i\omega} f(\xi) \frac{d^3p}{(2\Pi)^3} = -\frac{iT}{2} \sum_{\omega'} \frac{\text{sign}\ \omega}{|\omega| + |\omega'|} \tag{33}$$

$$G(\omega,\omega') = -\frac{\rho}{2\rho_0(\omega)} \int \frac{1}{\xi - i\omega} \frac{1}{\xi + i\omega'} d\xi = -i \frac{\theta(\omega\omega') \,\text{sign}\, \omega}{|\omega| + |\omega'|} \tag{34}$$

$$\frac{1}{2} i \rho g(i\omega) = \rho \int \frac{1}{i\omega - \xi} f(\xi) \, d\xi = \Pi \rho T \sum_{\omega'} \frac{1}{|\omega'| + |\omega|} \tag{35}$$

こうして得た，(32) ～ (35) を (30) に代入し，(22)，(23)，(30) から

$$\triangle(r) - gT\sum_{\omega} \int K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|,\omega) \triangle(s) \, d^3S$$

$$= -\left(\frac{J}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} gT \sum_{\omega} K_0(r,\omega) \int K_0(s,\omega) \triangle(s) \, d^3S + \left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2} \rho \Pi g T^2 \sum_{\omega\omega'}$$

$$\left[\frac{4}{|\omega| + |\omega'|} K_0(r,\omega) \int K_0(s,\omega) \triangle(s) \, d^3S - \frac{2}{|\omega| + |\omega'|} K_0(r,\omega) \times \int K_0(r,\omega') \triangle(s) \, d^3S\right] \tag{36}$$

を得る。(36) 式の右辺 J^2 の項のみをとれば，これは，T，T，や Heinrichs が扱った。Born 近似の範囲である。J^3 の項は Kondo 効果を考慮したため入ってきた。

§4. 積分方程式の解：

(36) 式を，Heinrichs に従って，積分演算子を使って，摂動として解こう。

$$L(r)\triangle(r)\equiv\frac{1}{g\rho}\left[\triangle(r)-gT\sum_{\omega}\int d^3S\,K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|,(\omega)\triangle(s)\right] \tag{37}$$

と定義すれば，(36) 式は，

$$\begin{aligned}L(r)\triangle(r)=&-\left(\frac{J}{2}\right)^2\frac{3}{2}\frac{T}{\rho}\sum_{\omega}K_0(r,\omega)<K_0(\omega)\triangle>\\&+\left(\frac{J}{2}\right)^3\frac{3}{2}\Pi\ T^2\sum_{\omega,\omega'}\left[4<K_0(\omega)\triangle>-2<K_0(\omega')\triangle>\right]\\&\times\frac{1}{|\omega|+|\omega'|}K_0(r,\omega)\end{aligned} \tag{38}$$

となる。ここで，$<F(r)>=\int F(r)d^3r$ と定義する。(38) 式の両辺に $z\triangle$ を加えて，

$$\begin{aligned}(L+z)\triangle=&-\left(\frac{J}{2}\right)^2\frac{3}{2}\frac{T}{\rho}\sum_{\omega}K_0(r,\omega)<K_0(\omega)\triangle>\\&+\left(\frac{J}{2}\right)^3\frac{3}{2}\Pi T^2\sum_{\omega,\omega'}\left[4<K_0(\omega)\triangle>-2<K_0(\omega')\triangle>\right]\frac{1}{|\omega|+|\omega'|}K_0(r,\omega)+z\triangle\end{aligned} \tag{39}$$

とし，

$$<(L+z)\triangle>\equiv 0 \tag{40}$$

なる z をとってやれば，

$$\begin{aligned}z<\triangle>=&\left(\frac{J}{2}\right)^2\frac{3}{2}\frac{T}{\rho}\sum_{\omega}<K_0(\omega)><K_0(\omega)\triangle>\\&-\left(\frac{J}{2}\right)^3\frac{3}{2}\Pi T^2\sum_{\omega,\omega'}\left(4<K_0(\omega)\triangle>-2<K_0(\omega')\triangle>\right)\frac{1}{|\omega|+|\omega'|}K_0(r,\omega)\end{aligned} \tag{41}$$

となる。Heinrichs の論文で，議論しているように，$<L+z>=0$ が遷移温度 T_c を決める式である。今，T_{co} を pure 超伝導体の遷移温度とすれば，

$$\ell n \frac{T_{co}}{T_c} = z \tag{42}$$

となる。以下，摂動を行うために，

$$\triangle(r) = (1+f(r))\triangle_0 , \qquad \triangle_0 \equiv \triangle(\infty) \tag{43}$$

と置き，z，f(r) を J^2，J^3 の項で，次のように展開する。

$$f(r) = f_1(r) + f_2(r) + \cdots\cdots \tag{44}$$

$$z = z_1 + z_2 + \cdots\cdots \tag{45}$$

$T \cong T_c$ では，(42) 式から，いわば，exact な z を決めることが出来るから，(39) 式の左辺を無摂動の部分として，とり扱うことが出来る。こうして，

$$\triangle(r) = \triangle_0 - \frac{1}{L+z}\Big[\left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2}\frac{T}{\rho}\sum_{\omega} K_0(r,\omega)\langle K_0(\omega)\triangle\rangle$$

$$-\left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2}\Pi T^2 \sum_{\omega,\omega'}\big(4\langle K_0(\omega)\triangle\rangle - 2\langle K_0(\omega')\triangle\rangle\big)K_0(r,\omega)\frac{1}{|\omega|+|\omega'|} - z\triangle\Big] \tag{46}$$

を得る。(41)，(46) から，

$$f_1(r) = -\frac{1}{L+z}\Big[\left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2}\frac{T}{\rho}\sum_{\omega} K_0(r,\omega)\langle K_0(\omega)\rangle - z_1\Big] \tag{47}$$

$$f_2(r) = \frac{1}{L+z}\Big[\left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2}\Pi T^2 \sum_{\omega,\omega'}\big(4\langle K_0(\omega)\rangle - 2\langle K_0(\omega')\rangle\big)\frac{1}{|\omega|+|\omega'|}$$

$$\times\langle K_0(\omega)\rangle + z_2\Big] \tag{48}$$

$$z_1 = \frac{1}{V}\left(\frac{J}{2}\right)^2 \frac{3}{2}\frac{T}{\rho}\sum_{\omega}\langle K_0(\omega)\rangle\langle K_0(\omega)\rangle \tag{49}$$

$$z_2 = -\frac{1}{V}\left(\frac{J}{2}\right)^3 \frac{3}{2}\Pi T^2 \sum_{\omega,\omega'}\big(4\langle K_0(\omega)\rangle - 2\langle K_0(\omega')\rangle\big)\langle K_0(\omega)\rangle\frac{1}{|\omega|+|\omega'|} \tag{50}$$

ここで，$V\to\infty$ をとれば，$f_1(r)$，$f_2(r)$ の z_1，z_2 の項は，第一項に比べて，$\frac{1}{V}$ の order であるから，無視出来て，

$$f_1(r)=-\frac{1}{L+z}\left[\left(\frac{J}{2}\right)^2\frac{3}{2}\frac{T}{\rho}\sum_{\omega}K_0(r,\omega)<K_0(\omega)>\right] \tag{51}$$

$$f_2(r)=\frac{1}{L+z}\left(\frac{J}{2}\right)^3\frac{3}{2}\Pi T^2\sum_{\omega,\omega'}\left(4<K_0(\omega)>-2<K_0(\omega')>\right)\frac{1}{|\omega|+|\omega'|}K_0(r,\omega) \tag{52}$$

となる。(49)，(51)は，まさに，Heinrichs が求めたものである。今，十分低温であれば，

$$\Pi\ T\sum_{\omega'}\frac{1}{|\omega|+|\omega'|}=\int_0^D\frac{dx}{x+|\omega|}=\ell n\frac{D}{|\omega|} \tag{53}$$

としてよい。ここで，Dは伝導帯の幅を与えている。また，

$$\Pi\ T\sum_{\omega'}\frac{1}{|\omega'|}\frac{1}{|\omega|+|\omega'|}=\frac{1}{|\omega|}\left\{\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|2n+1|\right)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{54}$$

となる。ここで，$\psi(x)$ は di Gamma 関数である。こうして遷移温度や，order parameter の空間的変化，$f_1(r)$，$f_2(r)$ が求められる。

$$\ell n\frac{T_{co}}{T_c}=z_1+z_2$$

$$=\frac{3\rho}{VT_c}\left(\frac{J}{2}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left[1-\frac{J}{2}\rho\left\{4\ell_n\frac{D}{(2n+1)\Pi T_c}-2\left(\psi(n+1)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\}\right] \tag{55}$$

$$f_1(r)=\left(\frac{J}{2}\right)^2\frac{9}{7\Pi^2\zeta(3)}\frac{m^2}{\xi_0{}^2}\left[\left\{\frac{\xi_0}{r}e^{-\frac{r}{\xi_0}}-E_1\left(\frac{r}{\xi_0}\right)\right\}-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{\xi_0}{r}\right] \tag{56}$$

$$f_2(r)=\left(\frac{J}{2}\right)^3\rho\, 3\Pi T\sum_{n\geq 0}\left\{4\ell_n\frac{D}{|\omega|}-2\left[\psi(n+1)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\frac{1}{|\omega|}\frac{1}{L+z}K_0(r,\omega)$$

$$= \left(\frac{J}{2}\right)^3 \rho \frac{9}{7\pi^2 \zeta(3)} \frac{m^2}{\xi_0^2} \Big[\left\{ 4\, \ell n \frac{D}{\pi T} - 2\left(\psi(1) - \psi(\tfrac{1}{2})\right) \right\} \left\{ \frac{\xi_0}{r} e^{-\frac{r}{\xi_0}} - E_1\left(\frac{r}{\xi_0}\right) \right\}$$

$$- \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \left\{ 4 \ell n \frac{D}{(2n+1)\pi T} - 2\left(\psi(n+1) - \psi(\tfrac{1}{2})\right) \right\} \frac{\xi_0}{r} \Big] \qquad (57)$$

ここで，ξ_0 は coherence length で，$\frac{v_F}{2\pi T_c}$，$\zeta(3)$ は ζ 一関数，$E_1(x) = \int_x^\infty dt \frac{e^{-t}}{t}$ である。遷移温度を決める（55）式は，Zuckermann[6] が導出したものを，J の三次まで展開したものに一致する。（55）式，及び，（56），（57）式において，J の二次，三次の項を比べることにより，$1 = 2|J|\rho\, \ell n \frac{D}{T_c}$，即ち，$T_c$ が近藤温度に近づくと，J の三次以上の項が重要となり，log 発散が起こることを示している。

§5. 結　　論：

不純物スピンの dynamics をとり入れて始めて，遷移温度や $\Delta(r)$ の空間的変化の J^3 の項に，Kondo 効果が表われることを示した。ここでの計算は，$\Delta(r)$ の $\xi_0 \ll r$ の領域における，J^3 の項までの計算を求めたに過ぎないが，$r \ll \xi_0$ の領域のことや，J のさらに高次の取扱に興味があり，残された問題である。さらに，T，T，や Heinrichs，ここでの計算も，T_c の極近傍での考察であるが，全温度領域での取扱いは，非線型積分方程式となり，正面から解いて行くことは，非常に困難と思われる。おわりに，問題を提供され，御指導下さった高野文彦先生，有益な議論をして下さった小寺武康先生，大沢健郎先生に感謝します。

参　考　文　献

1）　A.A.Abrikosov and L.P.Gor'kov, Zh, Exsp, i Teor, Fiz, 39 1781 ('60) (English trans; Sovet Phys, JETP 12 1243 ('61))

北村豊幸

2) J.Kondo, Prog, Theor, Phys, (Kyoto) 32 37 ('64)

3) S.H.Liu, Phys, Rev. 137 A1209 ('65)

4) A.Griffin, Phys, Rev, Letters 15 703 ('65)

5) K.Maki, Phys, Rev. 153 428 ('67)

6) M.J.Zuckermann, Phys, Rev. 168 390 ('68)

7) F.Takano and S.Matayoshi (to be published)

8) T.Tsuzuki and T.Tsuneto, Prog, Theor, Phys (Kyoto) 37 1 ('67)

9) J.Heinrichs, Phys, Rev. 168 451 ('68)

10) Y.Nagaoka, Phys, Rev. 138 1112 ('65)

11) Y.Nagaoka, Prog, Theor, Phys. (Kyoto) 37 13 ('67)